CONCOURS TA

A EPREUVES

COMMUNES

SESSION 1993

ENS Cachan - ENSAIS B - ENSAIT - ESEM - ITECH -ENSAM
CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 h 00

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé durant cette épreuve.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

$(E, |\ )$ est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x|y) \end{array}$ est le produit scalaire sur E,

$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{(x|x)} \end{array}$ est la norme associée au produit scalaire.

$\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E,

$(O(E), \circ)$ est le groupe orthogonal de E,

${}^tA$ est la transposée de la matrice A,

$F^\perp$ est l'orthogonal du sous espace vectoriel F de E,

Im(f) et Ker(f) désignent l'image et le noyau d'un endomorphisme f de E.

Id est l'identité sur E.

Mat $(f, \mathcal{B})$ désigne la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de E.

Dans la partie I on définit les endomorphismes symétriques positifs et on cherche leur racine carrée.

Dans la partie II on définit l'adjoint d'un endomorphisme puis on établit que quatre propriétés sont équivalentes, cette partie est indépendante de la partie I.

La partie III étudie une décomposition appelée décomposition de Cartan d'un endomorphisme.

Partie I

Étude d'endomorphismes positifs

On considère dans cette partie un endomorphisme symétrique de f de E, c'est à dire un endomorphisme tel que :

$$\forall\ (x,y) \in E^2, \quad (f(x)\,|\,y) = (x\,|\,f(y)).$$

On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f.

1. Que peut-on dire des valeurs propres et des sous espaces propres de f ?

2. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $\forall\ x \in E, \quad (f(x)\,|\,x) \geq 0$

(2) $\forall\ i \in \{1,2,\ldots,p\} \quad \lambda_i \geq 0.$

3. On dira qu'un endomorphisme f symétrique vérifiant (1) est positif.

3.a. Soient f et g deux endomorphismes symétriques et positifs tel que g o g = f.
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ désignent les valeurs propres distinctes de f.
Montrer que les valeurs propres de g sont les $\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq p$,
et que $\mathrm{Ker}\,(g - \sqrt{\lambda_i}\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\,\mathrm{Id})$.

3.b. En déduire qu'à tout endomorphisme symétrique et positif f on peut associer un endomorphisme g symétrique et positif unique tel que g o g = f.

4. On dira qu'une matrice carrée réelle symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont dans R^+.
On suppose que $E = R^2$; en utilisant les endomorphismes f_1 et f_2 dont les matrices dans la base canonique sont respectivement $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer les matrices symétriques positives (c'est à dire associées à des endomorphismes symétriques positifs) S_1 et S_2 telles que $S_1^2 = B_1$ et $S_2^2 = B_2$.

5. Soit la matrice :

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.a. Calculer $T' = A.{}^tA$.

5.b. Calculer les valeurs propres de T'.

5.c. Déterminer une base orthonormée de $E = R^4$ formée de vecteurs propres de T'.

5.d. Soit l'endomorphisme f de R^4 dont la matrice dans la base canonique est T'.
Vérifier que f est un endomorphisme symétrique positif ; déterminer la matrice S' symétrique positif telle que $S'^2 = T'$.

Partie II

Après avoir défini l'adjoint f^* d'un endomorphisme f de E, on étudie les relations entre deux endomorphismes f et g tels que $f^* \circ f = g^* \circ g$.

1. Définition de l'adjoint.
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.

L'endomorphisme f de E étant donné, on recherche un endomorphisme f^* tel que

(3) $\quad \forall\ (x,y) \in E^2, \quad \big(f(x) \mid y\big) = \big(x \mid f^*(y)\big).$

1.a. Montrer que, si f^* existe, alors

(4) $\quad \forall\ y \in E, \quad f^*(y) = \sum_{j=1}^{n} \big(f(e_j) \mid y\big) e_j$ et donc f^* est unique.

1.b. Réciproquement, vérifier que la relation (4) définit un endomorphisme satisfaisant à (3).

1.c. L'unique endomorphisme f^* vérifiant (3) s'appelle l'adjoint de f.
Comment s'appellent les endomorphismes tels que $f = f^*$, tels que $f \circ f^* = Id$?

Pour la suite de cette partie II, on considère f et g, deux endomorphismes de E et les propositions suivantes :

(5) $\quad f^* \circ f = g^* \circ g$

(6) $\quad \forall\ (x,y) \in E^2, \quad \big(f(x) \mid f(y)\big) = \big(g(x) \mid g(y)\big)$

(7) $\quad \forall\ x \in E, \quad \|f(x)\| = \|g(x)\|$

(8) $\quad$ Il existe $r \in O(E)$ tel que $f = r \circ g$.

2. Montrer que les propriétés (5), (6) et (7) sont équivalentes.

3. Montrer que (8) entraîne (7) ; établir la réciproque lorsque f ou g est bijective.

4. On se propose d'établir que (5) entraîne (8) dans le cas où ni f, ni g ne sont bijectives.
On suppose donc que f et g vérifient (5).

4.a. Montrer que Ker(f) = Ker (g).

4.b. Montrer que f induit un isomorphisme f_1 de $(\text{Ker}\,(f))^{\perp}$ sur Im(f) et que g induit un isomorphisme g_1 de $(\text{Ker}\,(f))^{\perp}$ sur Im(g).

4.c. Montrer que $r_1 = f_1 \circ g_1^{-1}$ vérifie $\|r_1(x)\| = \|x\|$ pour tout élément x de Im (g).

4.d. Montrer qu'il existe une application linéaire r_2 de $(\text{Im}\,(g))^{\perp}$ dans $(\text{Im}\,(f))^{\perp}$ telle que pour tout x de $(\text{Im}\,(g))^{\perp}$, $\|r_2(x)\| = \|x\|$.

4.e. En définissant une application linéaire r de E dans lui-même telle que,

pour tout x de Im(g), $r(x) = r_1(x)$
et pour tout x de $(\text{Im}\,(g))^{\perp}$, $r(x) = r_2(x)$

donner la conclusion.

Partie III

Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$. On étudie ici des décompositions de f sous la forme :

(9) : $f = r \circ s$

(10) : $f = s' \circ r'$

avec s et s ' endomorphismes symétriques positifs de E et r et r ' éléments de O(E).

1. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$.

1.a. Déterminer $(f^*)^*$ et $(f \circ g)^*$ en fonction de f, f^* et g^*.
Si f est bijective, déterminer $(f^{-1})^*$.

1.b. Montrer que $f^* \circ f$ et $f \circ f^*$ sont symétriques et positifs.

2.a En déduire que si s existe, il est uniquement déterminé comme l'endomorphisme symétrique positif dont le carré est $f^* \circ f$.

2.b. Montrer également que si s ' existe, il est unique.
Exprimer cet endomorphisme s ' à l'aide de $f \circ f^*$.

Dans toute la suite s et s' désignent les deux endomorphismes ainsi définis à l'aide de f et f^*.

3. En utilisant la partie II, montrer qu'il existe r, élément de O(E) tel que $f = r \circ s$.
Montrer de même qu'il existe r ' dans O(E) tel que $f = s' \circ r'$.

4. Montrer que $s = s'$ si et seulement si $f^* \circ f = f \circ f^*$.

5. On suppose que l'endomorphisme f est bijectif.
Montrer que $r = r'$. (pour cela, on commencera par prouver $s' = r \circ s \circ r^{-1}$ en comparant leurs carrés).

6. On choisit dans cette dernière question $E = \mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ puis $n = 4$.
Soit $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6.a. Montrer que $\mathrm{Mat}(f^*, \mathcal{B}_n) = {}^t\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_n)$.

6.b. Soit les matrices :
$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et A_3 la matrice A d'ordre 4 définie au I.5.).
Pour chaque i dans $\{1, 2, 3\}$, soit f_i l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant pour matrice A_i dans la base $\mathcal{B}_n$.
Les décompositions (9) et (10) s'écrivent alors $f_i = r_i \circ s_i = s'_i \circ r_i$.
Déterminer les matrices symétriques positives S_i et S'_i puis les matrices orthogonales U_i et U'_i telles que $A_i = U_i S_i = S'_i U'_i$.